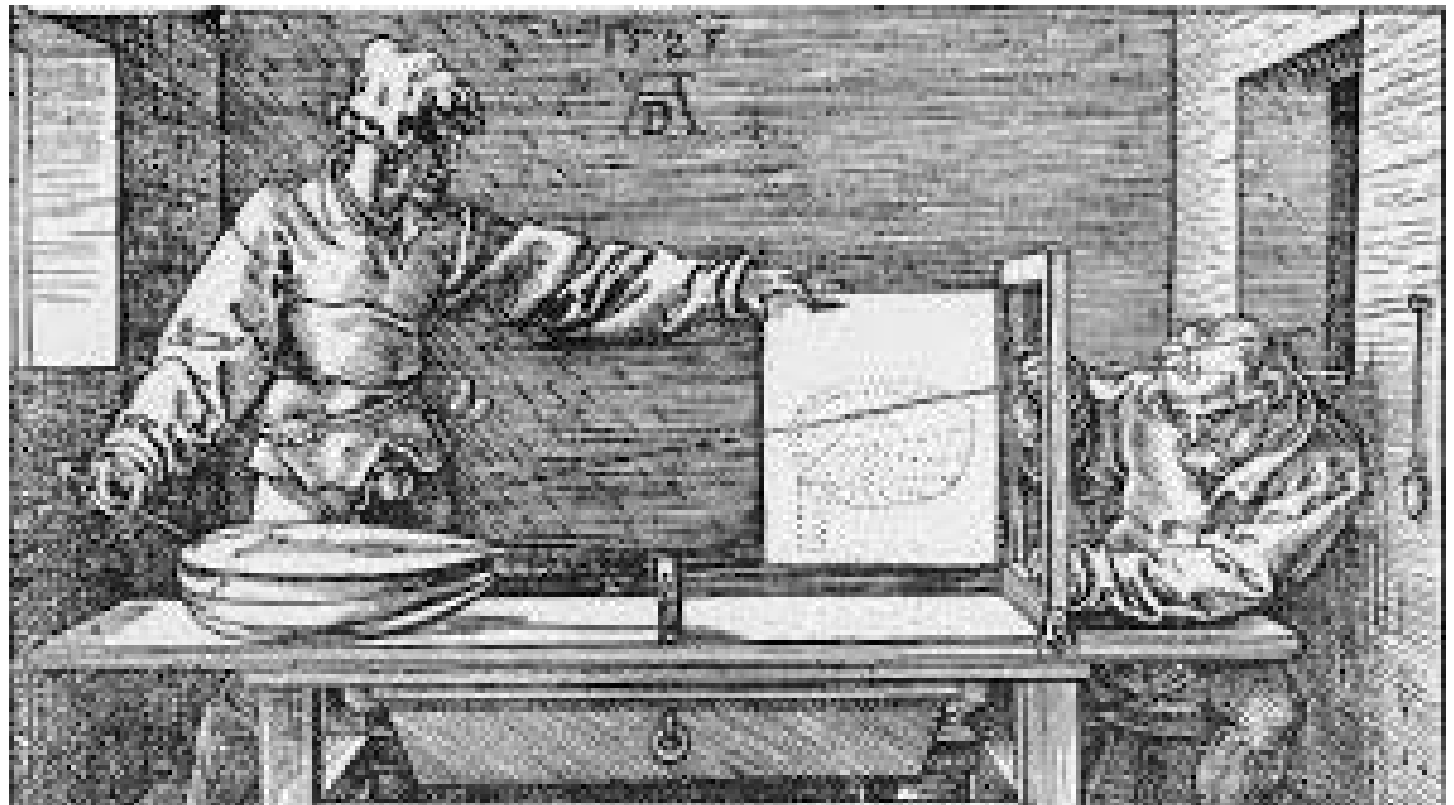


PERSPECTIVA

Geometria e arte no Renascimento

Eduardo Veloso

TEXTOS DE GEOMETRIA PARA PROFESSORES



Albrecht Durer. *Desenhando um alaúde*

Notas introdutórias

1. A introdução a um livro escreve-se normalmente depois de ele estar pronto ou quase. Como este livro será publicado *online* à medida que for sendo escrito — como será explicado numa nota posterior — e possivelmente nunca será acabado, iremos escrevendo notas introdutórias que serão substituídas talvez mais tarde por uma verdadeira introdução...

2. Este livro destina-se a ajudar os professores de Matemática que pretendam trabalhar com os seus alunos temas de matemática e da sua história dizendo respeito às relações muito importantes que durante o período do Renascimento se desenvolveram entre a arte e a geometria. Se o leitor fizer uma pesquisa nos actuais *programas e metas curriculares* de matemática dos ensinos básico e secundário, tentando encontrar referências, por exemplo, aos termos *arte*, *arquitectura* e *visualização*, verá que eles estão completamente ausentes desses textos... Este livro pretende colmatar em parte este facto, enquanto a substituição urgente daqueles programas não se realiza.

3. Como é natural, este livro conterà figuras e reproduções de obras de arte que exigirão naturalmente a utilização de cores, para além do preto e branco. Por outro lado será utilizado um programa de geometria dinâmica (o Geometric Sketchpad v. 5) que não só servirá para construir as figuras como poderá ajudar os leitores a visualizar melhor as construções geométricas e a experimentarem por si próprios — com este *software* ou outro equivalente — essas construções. Será natural portanto construir um *website* de apoio ao livro, que conterà os ficheiros Sketchpad para *download*, vídeos explicativos das diversas construções e outros materiais. Embora o livro seja escrito no programa *InDesign*, ele será depois transformado num ficheiro *PDF interactivo*. Todos estes factos levaram à decisão de construir progressivamente um *website* que além de apoiar o livro o contenha na forma de um ficheiro *PDF*, que poderá obviamente ser lido num ecrã de computador e/ou impresso a cores. Assim, o leitor encontrará nesse site não apenas o material de apoio ao livro como o próprio livro nas suas edições sucessivas ao longo do tempo. O endereço do *website* é

<https://www.eduardoveloso.pt/perspectiva/entrada.html>

4. Existem diversos e magníficos livros com as mesmas finalidades do que agora publicamos e que obviamente nos serviram de apoio na consecução deste projecto. Eles serão referenciados múltiplas vezes ao longo do presente livro e os leitores interessados neste tema deverão adquiri-los ou consultá-los. De uma maneira geral, o método que os autores desses livros seguem é descrever e analisar as experiências dos artistas do Renascimento nas suas tentativas para encontrar uma representação mais fidedigna do mundo, pessoas e objectos que nos rodeiam. Constroem assim, pouco a pouco, o sistema de representação que os artistas foram intuindo, que é a *perspectiva linear*.

Seguiremos neste livro uma via diferente, que nos parece mais apropriada para um livro destinado a professores de matemática. Já passaram mais de mil anos sobre o estabelecimento em bases sólidas de subdomínios da geometria que nos permitem compreender as tentativas e explorações dos artistas do Renascimento. A geometria projectiva de Desargues e Poncelet e a geometria descritiva de Monge são os fundamentos para essa compreensão. A opção que tomamos é portanto a seguinte:

- num primeiro capítulo iremos apresentar em termos breves, de modo apropriado para o ensino básico e secundário da matemática, as bases fundamentais da Geometria Descritiva de Monge, da perspectiva cavaleira (para facilitar a visualização das figuras e construções) e da perspectiva linear, a base geométrica das tentativas e sucessos da pintura do Renascimento;
- num segundo capítulo descreveremos as tentativas — conhecendo nós já o resultado final — dos principais artistas protagonistas dos sucessos pictóricos do Renascimento.

I. Da geometria descritiva à perspectiva linear



Gaspard Monge (1746-1818)

*A geometria descritiva tem duas finalidades:
a primeira, é fornecer os métodos para representar
sobre uma folha de papel,
que tem apenas duas dimensões, comprimento e largura,
todos os corpos da natureza que têm três
— comprimento, largura e profundidade —
desde que estes corpos possam ser definidos rigorosamente;
a segunda, é dar um processo de reconhecer,
a partir de uma descrição exacta,
as formas dos corpos, e daí deduzir todas as verdades
que resultam tanto da sua forma
como das suas posições respectivas.*

Gaspard Monge. *Géométrie Descriptive*, 1795.

Se o leitor é professor de Matemática e/ou frequentou uma disciplina ou cadeira de Geometria Descritiva, de pouco lhe servem as duas secções seguintes, que pretendem apresentar a geometria descritiva com um nível de complexidade apropriado para a generalidade dos alunos do ensino básico e secundário.

A maior parte dos alunos termina a escolaridade básica e secundária sem ter tido qualquer contacto com uma das mais belas partes da geometria — a geometria descritiva — dado que o seu destino académico não lhes vai exigir a frequência dessa disciplina nem no secundário nem no ensino superior. Dessa forma, fica muito prejudicada uma das finalidades do ensino da matemática, referida no “saudosos” currículo nacional:

Todas as crianças e jovens devem ter possibilidade de contactar, a um nível apropriado, com as ideias e os métodos fundamentais da matemática e apreciar o seu valor e a sua natureza.

Um método fundamental da matemática é precisamente a *Geometria Descritiva*, e a abordagem que vamos fazer permitirá mostrar como noções elementares de geometria descritiva – e não a frequência de uma disciplina anual de Geometria Descritiva – cabem perfeitamente na matemática que todos deveriam aprender. As duas primeiras secções deste capítulo consistem numa apresentação muito elementar da geometria descritiva de Monge, caracterizada exemplarmente por este no texto em epígrafe.

Breve introdução à Geometria Descritiva

Os apontamentos destinados aos alunos foram mais tarde editados em forma de livro no tratado *Géométrie Descriptive*. Ver bibliografia.

Desde há milhares de anos que os corpos naturais ou construídos no espaço são representados pelas suas projecções ortogonais num plano horizontal — planta, *plant* — e num plano vertical — alçado, *elevation*. Pode dizer-se que Gaspard Monge, nas suas aulas de geometria descritiva na *École Normale* criada por Napoleão em 1794, onde foram professores Lagrange e Laplace, não fez mais (...!) do que estudar matematicamente esse tipo de representação, útil por exemplo na construção de fortificações militares.

Na concepção de Monge, os corpos do espaço — pontos, segmentos, rectas, etc., excepto os planos, como veremos — são representados pelas suas projecções ortogonais em dois planos, um horizontal e outro vertical.

Estes planos, π_1 e π_2 (fig. 1), são figuras infinitas (como sempre...) mas aqui são representados por rectângulos sombreados, para visualizarmos melhor a sua posição relativa. A intersecção dos dois planos é uma recta designada tradicionalmente por *Linha de terra* (LT). Em português, é habitual designar por *vista de cima* e por *vista de frente* respectivamente a projecção de uma figura no plano horizontal e a projecção no plano vertical.

Na figura estão representados:

- Dois pontos P e Q , a recta r que definem, e as respectivas projecções P_1, Q_1 e r_1 (no plano π_1) e P_2, Q_2 e r_2 (no plano π_2). Assim, a vista de cima da recta r é a recta r_1 e a vista de frente do ponto Q é Q_2 , por exemplo;
- Um prisma recto de base triangular $ABCDEF$ e as vistas de cima e de frente. Note-se que para esta posição do prisma as vistas de algumas arestas se reduzem a um ponto: por exemplo, a vista de cima da aresta vertical DA é um ponto; assinala-se o facto deste ponto do plano π_1 representar as vistas coincidentes dos dois pontos A e D com a notação $D_1 \equiv A_1$;
- Um plano α . Note-se que a representação de um plano no sistema de projecções da geometria descritiva consiste em traçar as rectas de intersecção do plano — designadas por *traços do plano* — com os dois planos de projecção, no caso α_1 e α_2 . Os traços intersectam-se obviamente na linha terra. No caso de um plano paralelo à linha terra, os traços α_1 e α_2 são paralelos a LT.

Note-se que Monge, no texto que transcrevemos, afirma que a representação é “sobre uma folha de papel, que tem apenas duas dimensões”. A fig. 1 é assim apenas o primeiro passo... O segundo (fig. 2) consiste em efectuar uma rotação de 90° de um dos planos — por exemplo π_1 — em torno de LT, ficando assim a coincidir com π_2 . Ficamos assim com um único plano — o da folha de papel ou do ecrã de computador — que resulta da sobreposição de π_1 e de π_2 .

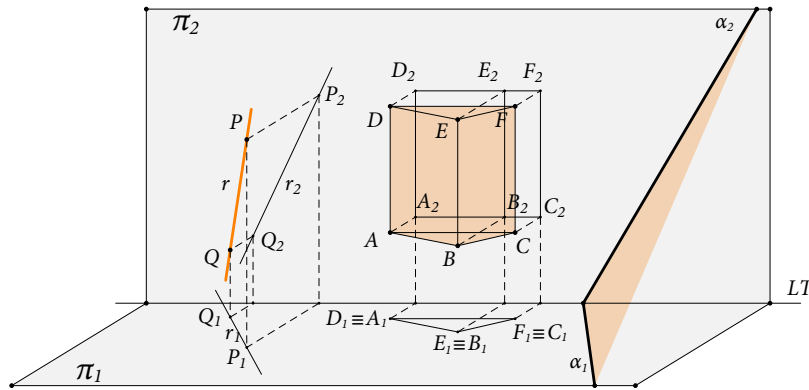


Figura 1

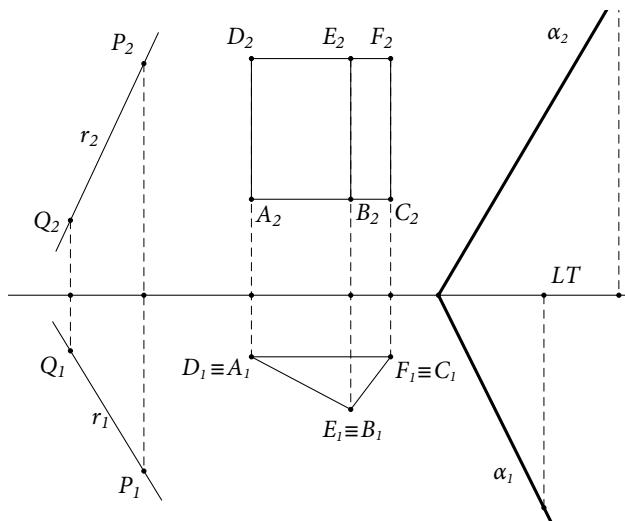


Figura 2

Veja o [vídeo_cap_I_1](#)

O espaço está representado num plano. Cada corpo desse espaço é dado por duas figuras. É a partir de cada par de figuras que devemos visualizar o corpo que lhes deu origem. Os sombreados desaparecem, pois tornam-se desnecessários, há agora um único plano (que representa π_1 e π_2). As figuras que representam corpos — e não as suas projecções — desaparecem, deixam de ter sentido. É este tipo de figura — com as vistas de cima e de frente dos corpos que queremos representar e com a recta horizontal LT — que em geometria descritiva se utiliza para:

- *apresentar os dados de um problema;*
- *efectuar as construções necessárias para a sua resolução;*
- *apresentar a solução.*

Note-se portanto que os próprios corpos nunca são representados, escepto quando pertencem aos planos de projecção...

Muitíssimo importante é ainda a frase de Monge “desde que estes corpos possam ser definidos rigorosamente”, que muitas vezes passa despercebida. Por outras palavras, só se um corpo está definido rigorosamente é que as suas vistas chegam para o identificar.

Um sólido como o prisma recto $ABCDEF$, representado nas fig. 1 e 2, é um bom exemplo para provar que assim é. Se observarmos os dois corpos mostrados em perspectiva na fig. 3 constatamos que são diferentes mas têm as mesmas vistas! (fig.4). À direita temos um paralelepípedo recto de base triângular, ou seja, uma figura constituída por dois triângulos e três rectângulos. À esquerda temos uma figura no espaço formada por um triângulo e dois rectângulos. Este facto, que pode acontecer em múltiplas situações, mostra bem a importância da frase de Monge que referimos.

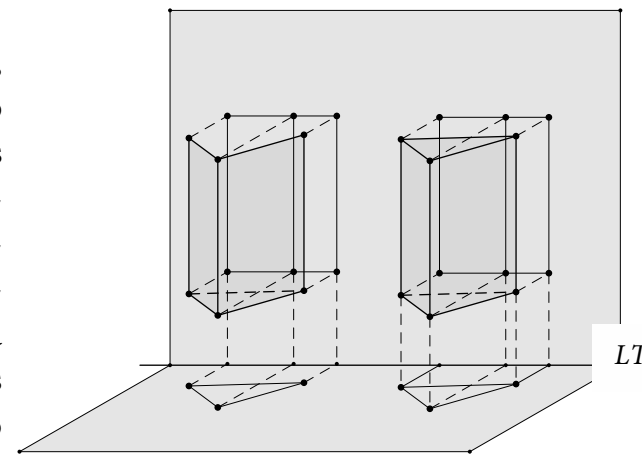


Figura 3

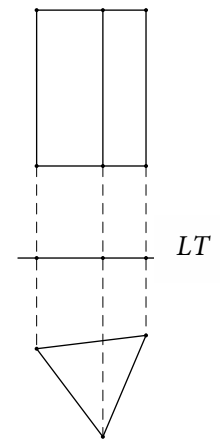


Figura 4

Problemas elementares de Geometria Descritiva

Iremos agora enunciar e resolver a sequência das seis primeiras questões, necessariamente elementares, que Monge propunha aos seus alunos. É muito importante que o leitor — se nunca estudou geometria descritiva — e os seus alunos — se, neste nível elementar adoptado aqui, a descritiva for incluída no ensino não universitário para todos os alunos, dada a sua importância no desenvolvimento das capacidades de visualização e a sua relevância do ponto de vista cultural, como tema maior na história da matemática — tentem, *numa folha de papel*, como diria Monge, ou *num ecrã de computador e com a ajuda de um programa de geometria dinâmica*, como fazemos agora, partir dos dados de cada problema e visualizar e efectuar as construções geométricas necessárias para a sua resolução.

P_1. Dado um ponto A e uma recta r , construir uma recta s passando por A e paralela a r .

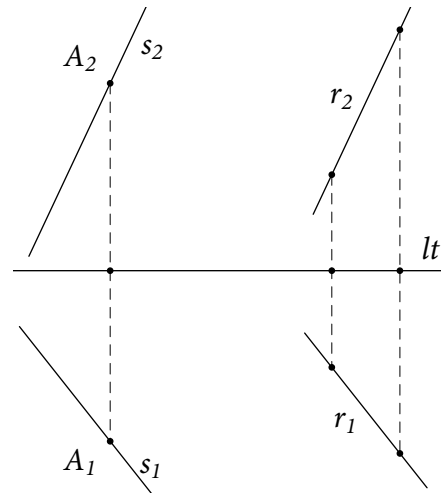


Figura 5

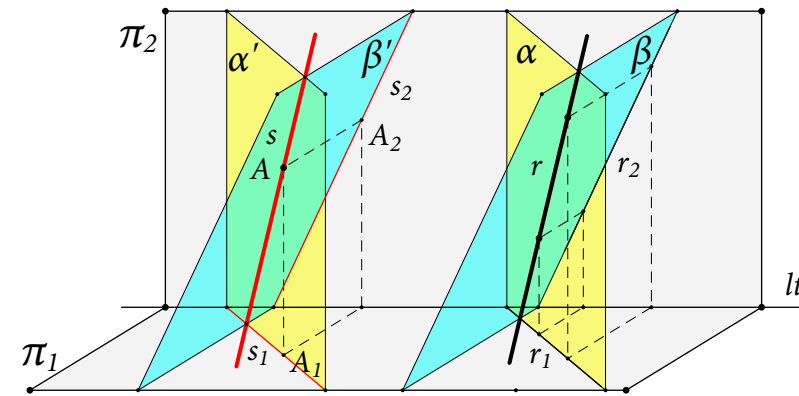


Figura 6

A primeira coisa a fazer é construir uma figura com as vistas correspondentes ao enunciado. Note no entanto que na fig. 5 já está construída, além da recta r e do ponto A , a solução do problema, isto é, a recta s . Leia a seguir a resolução deste problema.

Pretendemos construir uma recta s passando por A e paralela a r . Para que assim seja, basta que as vistas de s contenham as vistas de A e sejam paralelas às vistas correspondentes de r . Com efeito, visualizando a situação em perspectiva, se imaginarmos o plano projectante frontal da recta r — seja α , na fig. 6 —, e depois construirmos o plano α' paralelo a α e passando por A , a recta s , paralela a r e passando por A , estará contida em α' . Mas α' , sendo paralelo a α , é um plano projectante frontal e a sua intersecção com π_1 é s_1 , que é portanto paralela a r_1 . Da mesma forma, imaginando os planos projectantes horizontais β e β' , provamos que s_2 deverá ser paralela a r_2 .

P_2. Dado um plano α e um ponto P , determinar os traços de um plano β contendo P e paralelo a α .

Quando, naturalmente, começamos por desenhar nas vistas os dados do problema, surge imediatamente uma primeira questão: depois de desenhados os traços de um plano α , como desenhar as duas vistas de P de modo que seja exterior a α ?

Começamos por resolver esta questão e depois passaremos ao problema P_II.

Construamos (fig. 7) um ponto qualquer $A(A_1, A_2)$ no traço α_2 — obviamente, A_1 é um ponto de lt . Tracemos a recta $r_2 = A_2P_2$ do plano π_2 . Se designarmos

- por B_2 a sua intersecção com lt ;
- por B_1 a intersecção da perpendicular a lt , passando por B_2 , com α_1 ;
- e por r_1 a recta A_1B_1 ,

a recta $r = AB(A_1B_1, A_2B_2)$ será uma recta do plano.

Assim sendo, para que um ponto P , com a vista de frente P_2 , pertença ao plano, tem que pertencer à recta r , ou seja tem que a vista de cima de P ser o ponto P'_1 . Ou seja o ponto $P(P_1, P_2)$ não é um ponto do plano α .

Passemos então à resolução do problema **P_2**. (fig. 8)

Se α e β são paralelos, então os traços α_1 e β_1 , sendo as suas intersecções com o plano π_1 , são paralelos. O mesmo se passa com α_2 e β_2 . Mas então, para resolvermos o problema, apenas precisamos de determinar um ponto de um dos traços de β ! Com efeito, se sabemos por exemplo que esse ponto irá pertencer a β_2 , e se por ele traçarmos uma paralela a α_2 , obtemos β_2 . E se pela intersecção de β_2 com lt traçarmos uma paralela a α_2 , obtemos β_1 ! Assim sendo, iremos resolver **P_2** construindo, a partir dos objectos iniciais da fig. 8 — o plano $\alpha(\alpha_1, \alpha_2)$ e o ponto $P(P_1, P_2)$, que já sabemos não pertencer a α —, um ponto $Q(Q_1, Q_2)$ de β_2 .

Começamos construir uma recta $s(s_1, s_2)$, nas seguintes condições:

- contém o ponto P — então s_2 passa por P_2 e s_1 passa por P_1 ;
- horizontal — então s_2 é paralela a lt ;
- (horizontal) e paralela ao plano α — então s é paralela a todas as horizontais do plano α , em particular a α_1 , logo s_1 é paralela a α_1 .

Sendo s uma recta paralela ao plano α e que contém o ponto P , então s é uma recta do plano β , logo a sua intersecção com o plano π_1 — na figura o ponto $Q(Q_1, Q_2)$ — é um ponto do traço β_2 , que se constrói traçando uma paralela a α_2 passando por Q_2 . Finalmente, β_1 constrói-se traçando uma paralela a α_1 passando pela intersecção de β_2 com lt .

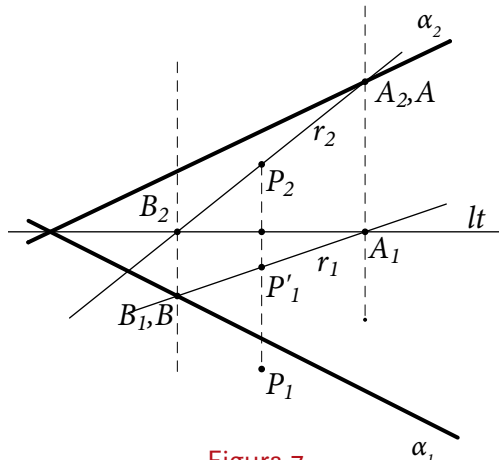


Figura 7

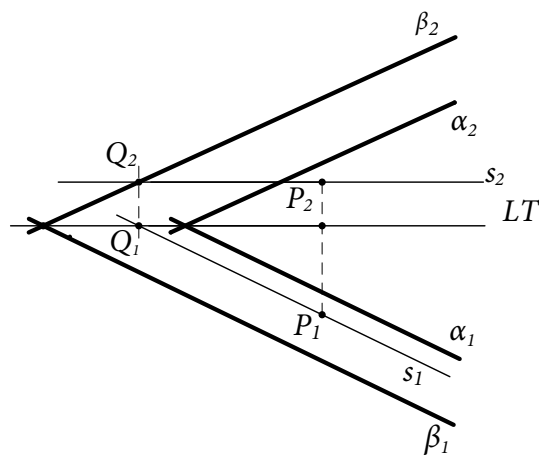


Figura 8

Veja o [vídeo_cap_I_2](#)

P_3. São dados um plano φ e um ponto P . Construir a recta p — contendo P e perpendicular a φ — e o ponto Q — intersecção de p com φ .

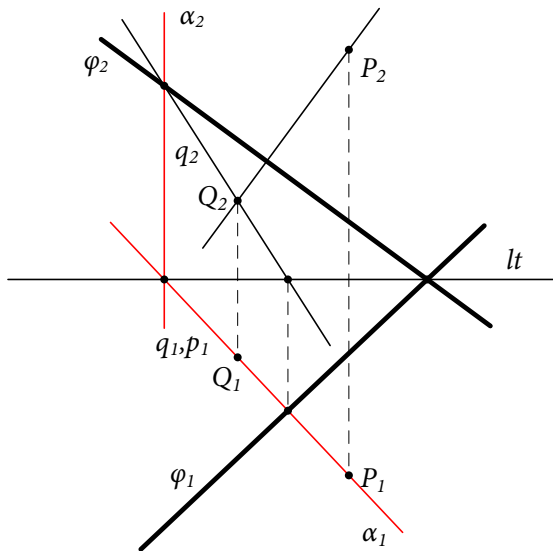


Figura 9

Veja o [vídeo_cap_I_3](#)

Imaginemos um plano α projectante horizontal, contendo P e ortogonal a φ_1 (fig. 9). Então

- como φ_1 é a intersecção do plano φ com o plano horizontal π_1 , α_1 é perpendicular a φ_1 ;
- como α é ortogonal ao plano π_1 e contém P , a recta p_1 , contendo P_1 e perpendicular a φ_1 , coincide com α_1 .

Analogamente, imaginando um plano β , ortogonal ao traço φ_2 e contendo P , concluiríamos, que a recta p_2 , contendo P_2 e perpendicular a φ_2 , é a vista de frente da perpendicular a φ passando por P . Fica assim concluída a construção da recta p .

Passemos agora à construção de Q , intersecção da recta p com o plano φ . A intersecção de α com π_1 é uma recta s do plano α cuja vista de cima s_1 coincide com p_1 .

Na figura, construímos s_2 a partir das intersecções de s_1 com φ_1 e com φ_2 . Q_2 será então a intersecção de s_2 com p_2 e Q_1 obtém-se através de uma perpendicular a lt .

P_4. Dada uma recta r e um ponto P , construir o plano α contendo P e ortogonal à recta r . (fig. 10)

Sabemos que os traços (horizontal e vertical) de α deverão ser perpendiculares às vistas (resp. de cima e de frente) da recta r (do problema anterior) e que para os traçar basta conhecer um ponto de um deles (de **P_2**). Então, se determinarmos a intersecção com o plano π_2 de uma recta horizontal passando por P (construção a tracejado), obtemos um ponto do traço α_2 e o problema fica resolvido.

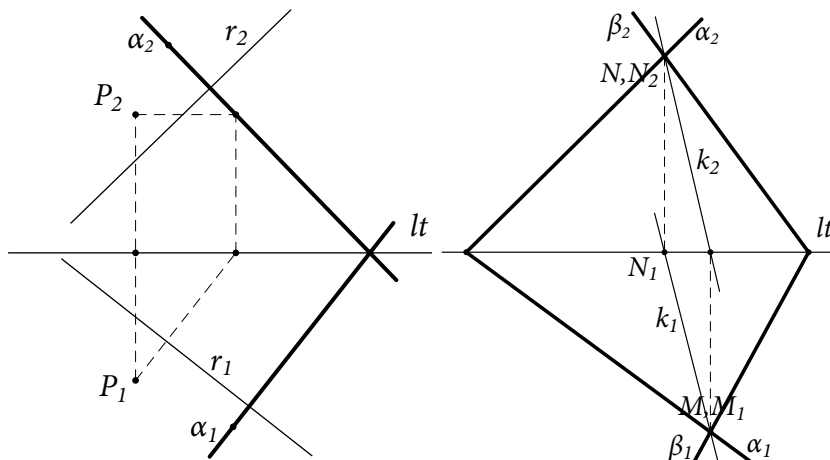


Figura 10

P_5. Dados dois planos α e β , determinar a sua intersecção k . (fig. 11)

Os pontos de intersecção dos traços do mesmo nome), pontos N e M , pertencem a ambos os planos, e portanto a recta que definem, $k(k_1, k_2)$, é a intersecção dos dois planos.

P_6. Dados dois planos α e β , determinar o ângulo que fazem entre si.

Neste problema iremos partir da sua visualização no espaço, com os dois planos de projecção ainda ortogonais um ao outro (fig. 12, pág. seguinte). Os planos α e β são dados pelos seus traços. A estratégia de resolução deste problema será a seguinte:

- Pretendemos determinar o ângulo que fazem entre si os planos α e β . Para isso daremos os seguintes passos:

Figura 11

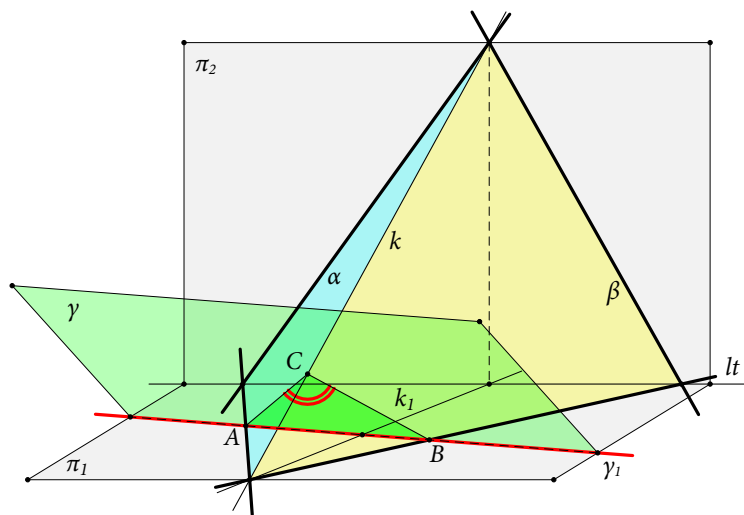
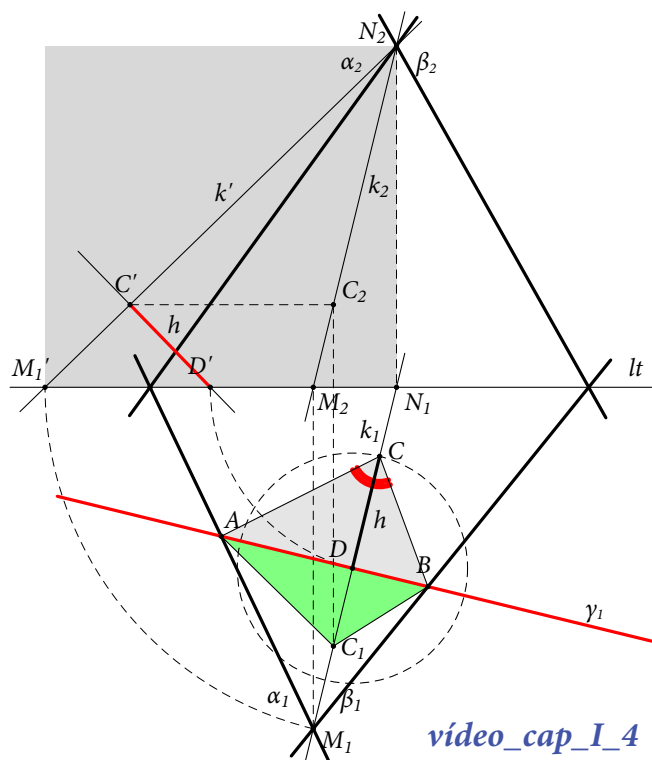


Figura 12



vídeo_cap_I_4

Figura 13

- 1) Construção da sua intersecção k .
- 2) Construção de um plano γ ortogonal a k . Construção das intersecções A e B de γ_1 com α_1 e β_1 .
- 3) Construção da intersecção C de γ com k .
- 4) O ângulo entre os planos α e β é o ângulo interno do triângulo ABC no vértice C . Mas obviamente, esse ângulo em perspectiva não está em verdadeira grandeza. Será portanto necessário obter o triângulo ABC em verdadeira grandeza.

Prosseguimos com a resolução dos passos 1) a 4) em geometria descritiva.

- 1) A intersecção dos planos α e β é a recta $k(k_1, k_2)$ que passa pelos pontos M_1 — intersecção de α_1 e β_1 — e N_2 — intersecção de α_2 e β_2 .
- 2) Já sabemos do problema **P_3** que os traços de γ são perpendiculares às vistas (do mesmo nome) de k . Como apenas iremos necessitar do traço horizontal de γ , traçamos a recta γ_1 perpendicular a k_1 , e designamos por A e B as intersecções com α_1 e β_1 e por D a intersecção com k_1 .
- 3) Num processo habitual em geometria descritiva, para a construção do ponto C vamos fazer uma rotação do plano projectante horizontal de k em torno da sua intersecção N_2N_1 , no sentido retrógrado, até esse plano se confundir com o plano de frente (bastaria que ficasse paralelo ao plano de frente para permitir a construção que vamos fazer). Assim, os pontos D e M_1 e a recta k_1 são transformados respectivamente em D' , M_1' e k_1' . Se pelo ponto D' tirarmos uma perpendicular a k_1' , a intersecção será o transformado C' de C pela rotação e, assim sendo, o ponto C_2 obtém-se pela intersecção de uma horizontal passando por C' com a recta k_2 e depois obtém-se a outra vista C_1 por uma construção óbvia.
- 4) O segmento $D'C'$, que designaremos por h , é obviamente a altura do triângulo ABC relativa ao ponto C . Portanto, se traçarmos a circunferência de centro D e raio h , e determinarmos a sua intersecção com k_1 , obtemos o triângulo ABC em verdadeira grandeza, como pretendíamos. E em consequência, o ângulo (a vermelho) entre os planos α e β , como era pedido.

Problemas propostos

P_7. Dadas duas rectas AB e AC , que se intersectam no espaço (ponto A), construir o ângulo que formam entre si.

P_8. Dadas as projecções de uma recta e os traços de um plano, construir ângulo que a recta e o plano formam entre si.

P_9. Sendo dados o ângulo que duas rectas formam entre si e os ângulos que formam uma e outra com o plano horizontal, construir a projecção horizontal do primeiro destes ângulos.

Ver bibliografia.

Perspectiva Cavaleira

Nesta secção iremos apenas fazer uma apresentação elementar da perspectiva cavaleira, o suficiente para uso corrente e de suporte à construção da perspectiva “dos pintores”. O leitor que pretenda desenvolver os seus conhecimentos neste tipo de perspectiva, em todos os seus aspectos, deverá recorrer à abundante literatura existente.

Imagine o leitor que um dos seus alunos pedia para, *num simples desenho*, lhe mostrar o que era um cubo

e que tinha à sua disposição os dois seguintes (*I* e *II*)...(fig. 14). A representação *I* é a da geometria descritiva, a representação *II* a da perspectiva cavaleira... Não é certamente difícil prever que o leitor escolheria a representação em perspectiva cavaleira, embora, se quisesse avançar um pouco mais na explicitação do que é um cubo, acrescentaria que as arestas são todas iguais e porventura outras considerações sobre a perpendicularidade entre algumas faces — embora este aspecto seja mais intuitivo. Pelo contrário, a igualdade das arestas e a perpendicularidade de quaisquer duas faces adjacentes podem *deduzir-se* da representação *I* — embora seja essencial, para a compreensão do que está representado, referir que se trata de um *poliedro*. Na actualidade, somos permanentemente bombardeados — na televisão e nas imagens dos jornais — com representações em *perspectiva cavaleira*, daí a sua importância cultural e razão para sua inclusão na educação matemática para todos.

Nas páginas anteriores sobre geometria descritiva, por exemplo na resolução de problemas, o leitor deve ter reconhecido a importância de considerar, para além das figuras próprias da geometria descritiva, a sua transcrição em perspectiva cavaleira. Aprenderemos, na subsecção seguinte, a fazer geometricamente essa transcrição.

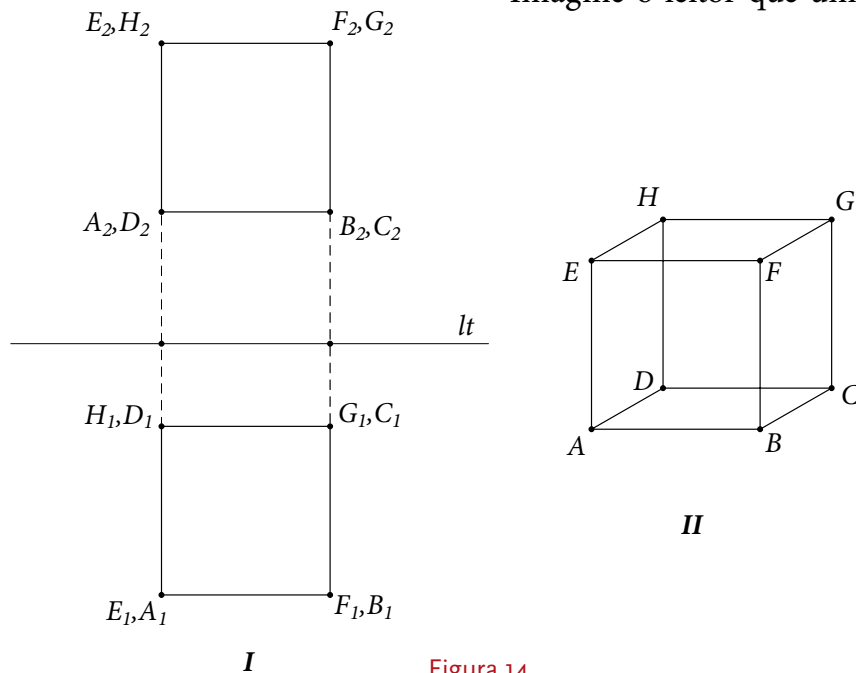


Figura 14

Da geometria descritiva à perspectiva cavaleira

Iremos descrever como se pode obter, a partir de uma representação em geometria descritiva, uma representação em perspectiva cavaleira. Antes, porém, é necessário explicitar em que consiste a perspectiva cavaleira.

Se considerarmos um objecto k no espaço, a perspectiva cavaleira desse obtém-se efectuando uma *projectão paralela* de k num plano vertical π . Ou seja, dada uma *direcção* d no espaço (por meio de um segmento, semi-recta ou recta), faz-se passar por cada ponto P do objecto k — ou, pelo menos, pelos pontos suficientes para definir k — uma recta com essa direcção e constrói-se a sua intersecção P' com o plano π . A partir das imagens dos pontos P obtém-se a imagem k' de k , que é designada por *perspectiva cavaleira* de k relativa à direcção d . Naturalmente, excluem-se a direcção perpendicular e as direcções paralelas ao plano π .

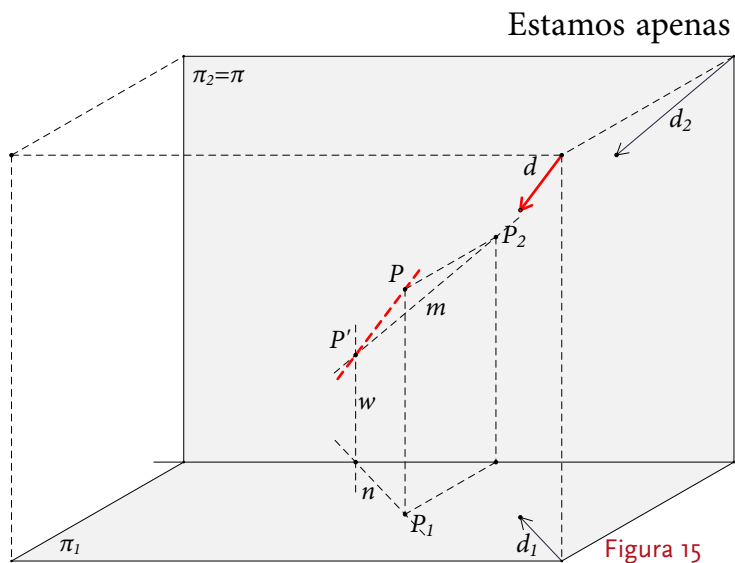


Figura 15

Veja um vídeo no [site](#) sobre a construção da ferramenta descritiva—cavaleira no GSP.

Estamos apenas interessados, neste livro, em obter a perspectiva cavaleira de objectos de que conhecemos a representação em geometria descritiva. Portanto iremos partir dos dois planos com que iniciámos a introdução à geometria descritiva, os planos π_1 e π_2 . Tomaremos sempre como plano vertical π o plano π_2 (fig. 15).

Note que, além dos planos π_1 e π_2 , traçamos uns segmentos a tracejado que definem um paralelepípedo. Este expediente apenas se destina a sugerir o espaço tridimensional em que os planos se situam e permite por exemplo desenhar e visualizar a direcção d (a vermelho) da perspectiva cavaleira.

A direcção d de projecção é definida pelas suas vistas d_1 e d_2 . Dado um ponto $P(P_p, P_2)$, o **LT** que pretendemos é efectuar uma construção geométrica que nos dê a sua *perspectiva cavaleira*, ou seja a sua projecção P' no plano π na direcção $d(d_p, d_2)$.

Essa construção é bem fácil de conceber, se observarmos a fig. 15:

- tiramos a paralela n a d_p , passando por P_p , e a paralela m a d_2 , passando por P_2 ;
- pelo ponto de intersecção de n com lt tiramos uma perpendicular w a lt ;
- o ponto P' , intersecção de w com m , é a perspectiva cavaleira de P segundo a direcção d .

Como é evidente, a posição de P' no plano π depende da direcção d que escolhemos.

Coloca-se então a questão: que direcção escolher? Efectuámos construções em perspectiva cavaleira de um cubo, correspondentes a várias escolhas da direcção de projecção d (fig.16).

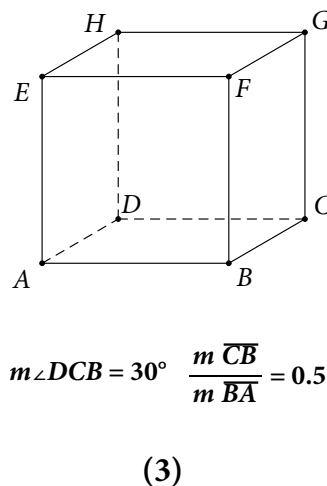
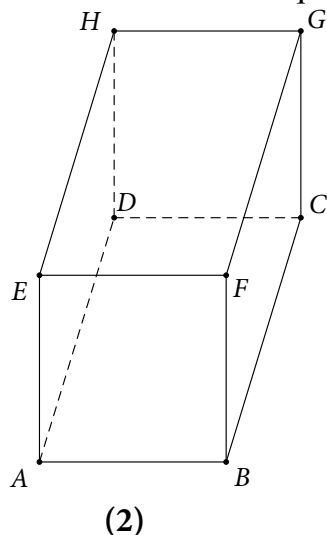
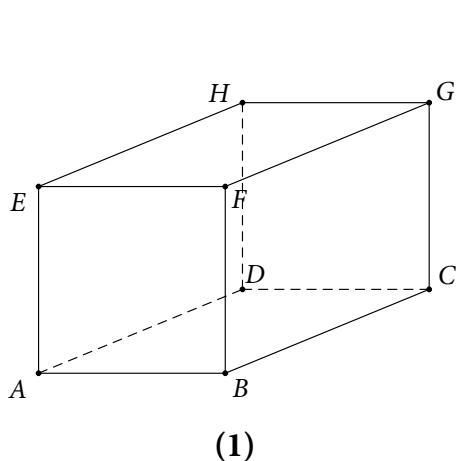


Figura 16

Qual dos três casos escolheria o leitor para representar um cubo? A direcção mais frequentemente adoptada é a correspondente ao caso (3) e pode ser definida como sendo aquela em $CB/BA=0.5$ e o $\angle DCB=30^\circ$. Esta direcção de projecção será sempre a escolhida neste livro, salvo menção em contrário.

As figuras anteriores 1, 3, 6, 12 e 15, que auxiliaram a compreensão da resolução dos problemas de geometria descritiva anteriores, foram todas construídas a partir das vistas e utilizando a perspectiva cavaleira correspondente a esta direcção de projecção.

Perspectiva linear ou dos pintores

Para mostrar o que é a perspectiva linear iremos servir-nos da gravura de Dürer que ilustra a capa deste livro —

Desenhando um alaúde ((fig. 17). O pintor – sentado – e o seu assistente montaram um sistema de trabalho em que podemos distinguir:

1. *Um prego na parede* — **O** — a que os italianos chamam *occhio* e que nós designaremos por *ponto de vista*. Pretende representar os olhos de um pintor que estaria a desenhar o alaúde e o facto de tomarmos por um ponto o que na realidade são dois olhos e um processo cerebral de processar a imagem recebida levanta numerosas questões que Dürer evita deste modo. Não discutiremos neste livro essas questões, pois apenas trataremos dos aspectos puramente geométricos.

Estamos a supor que o *ponto de vista* pode ocupar diversas posições na parede.

2. *Um estrutura rectangular vertical* — **Q** — que se pode deslocar sobre a mesa, aproximando-se ou afastando-se do *ponto de vista*.

3. *Um alaúde sobre a mesa* — **AI**

4. *Um fio esticado* — **F** — desde o prego **O** até um ponto do alaúde **A** (missão do ajudante).

O quadro **Q** tem as seguintes características:

- Uma moldura rectangular **M**; esta moldura comporta duas hastes finas **H₁** e **H₂**, uma horizontal e outra vertical, que se podem deslocar paralelamente aos lados do rectângulo (fig. 18).

car paralelamente aos lados do rectângulo (fig. 18).

- Um rectângulo **D** de madeira com as dimensões do interior da moldura **M**, que está ligado e roda em torno de um dos lados verticais da moldura, podendo fechar e abrir a moldura (missão do ajudante) deixando as hastes **H₁** e **H₂** do lado do pintor. A este rectângulo está fixa a folha de papel **P** onde o pintor irá desenhar o alaúde.

O pintor desenha o alaúde a partir de um conjunto de pontos traçados sobre **P** pelo seguinte processo:

i) O assistente afasta o rectângulo de madeira da moldura, faz passar a ponta livre **A** do cordel pelo interior da moldura e estica o cordel até colocar **A** num ponto do alaúde indicado pelo pintor.

ii) O pintor move as hastes **H₁** e **H₂** até estas se cruzarem no ponto do cordel que está no plano da moldura.

iii) O assistente coloca a ponta **A** do cordel de modo que não impeça o movimento de **D** e roda **D** até fechar a moldura.

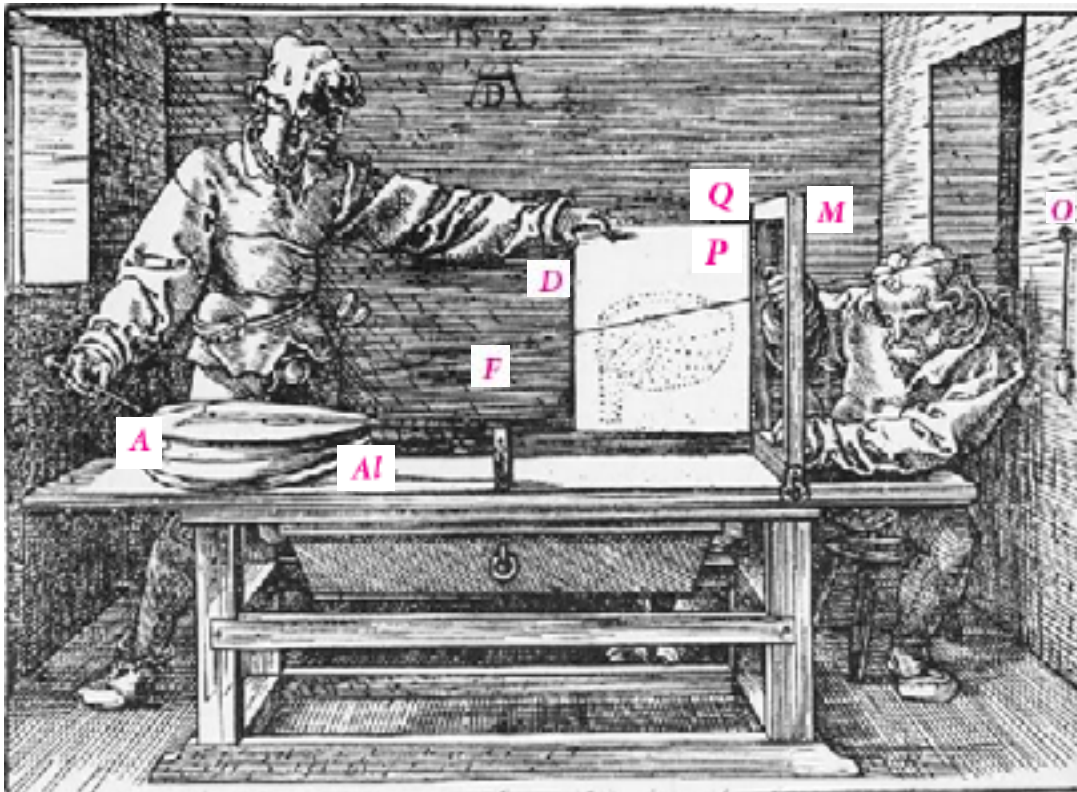


Figura 17

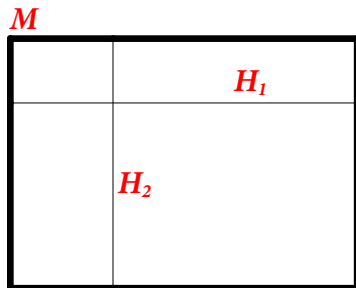


Figura 18

iv) O pintor marca um ponto no papel na intersecção das duas hastes. Naturalmente, o pintor marca tantos pontos sobre o papel quantos os necessários para o desenho.

Assim, o tipo de perspectiva que estamos a estudar procura *representar* numa *figura plana* paisagens, edificações, pessoas, ou qualquer tipo de corpo ou objecto e pressupõe:

1. Um *ponto de vista*, designado habitualmente por **O**.
2. Um *plano* – designado *plano da figura* (que não tem que ser vertical, mas que suporemos neste livro sempre vertical).
3. Um *enquadramento* para a *figura*, que neste livro será sempre um *rectângulo KLMN* com dois lados horizontais e situado no *plano da figura*;
4. Um *processo* para traçar a *figura*, que consiste em registar os pontos de intersecção das rectas que unem pontos dos corpos a representar com o ponto **O** (daí o adjectivo *linear*).

Dois observações importantes:

- a) Se imaginarmos as quatro semi-rectas que unem o ponto **O** com os vértices **KLMN** do *rectângulo* no ponto 3, apenas são representáveis por este processo os corpos que forem interiores à superfície piramidal assim definida.
- b) Para traçar a figura, não é necessário registar *todos* os pontos de intersecção referidos no ponto 4. Por exemplo, para representar uma recta basta registar as intersecções definidas por *dois* pontos da recta, e depois traçar a recta que os une. Este ponto é muito importante e será desenvolvido na subsecção seguinte.

A perspectiva linear foi utilizada correntemente pelos pintores do Renascimento e inventada e estudada por alguns deles, como veremos no cap. II. Daí o atributo *dos pintores*.

Características da perspectiva linear

Iremos agora estudar, nas próximas secções, a perspectiva linear e as suas principais características.

Uma primeira observação a fazer, muito importante, é que estamos no domínio da *geometria projectiva* de Desargues e Poncelet e não mais exclusivamente da geometria euclidiana. Interessa-nos sobretudo ter em conta os objectos *do infinito* e assim considerar que

- cada recta tem pontos a distância finita e um ponto no infinito;
- duas rectas intersectam-se sempre num ponto, ou a distância finita ou, no caso de serem paralelas, num ponto do infinito (neste caso trata-se de um ponto do infinito comum às duas rectas);
- um feixe de rectas paralelas têm um ponto comum no infinito;
- um plano possui sempre, além das rectas do espaço euclidiano, uma recta no infinito; duas (ou mais) rectas paralelas do plano encontram-se num ponto dessa recta;
- dois planos paralelos intersectam-se sempre numa recta; se são paralelos, a recta de intersecção é a recta do infinito comum aos dois planos.

Outra questão muito importante a ter em conta é que a perspectiva linear, sendo uma projecção central, transforma rectas em rectas e, por essa razão, o pintor, se quiser traçar a imagem de uma recta definida por dois pontos R e S , basta encontrar as imagens dos pontos R e S e depois traçar a recta passando por eles. É este tipo de simplificações no seu traçado que os pintores do Renascimento procuraram e encontraram quando deram os primeiros passos na sua invenção da perspectiva linear, como veremos no *Cap. II*.

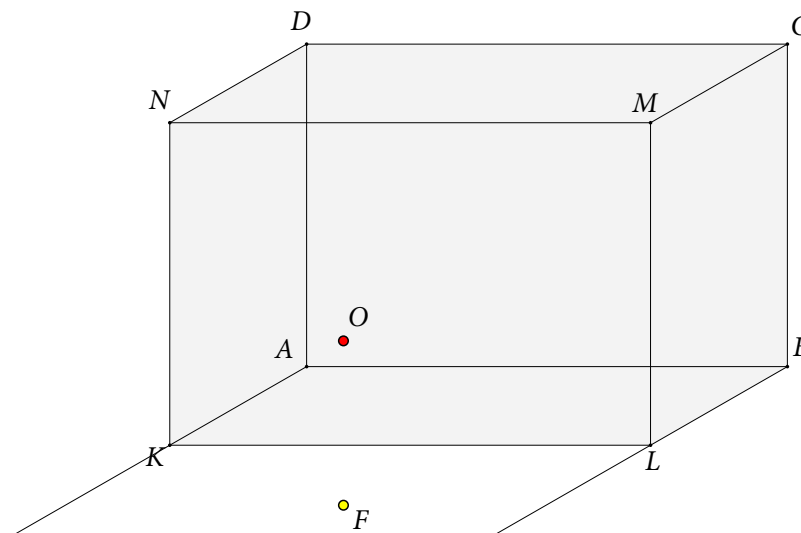


Figura 19



Figura 20

Para simplificar, suporemos uma situação simples: uma sala rectangular $KLMNABCD$, um ponto de vista O e a sua projecção horizontal F (do inglês *foot*) (fig. 19). O plano da figura é o plano da face $KLMN$ e pretendemos representar a sala e os objectos no seu interior numa figura em perspectiva linear traçada na face $KLMN$. Os problemas de representação em perspectiva linear que iremos estudar são os mesmos que Dürer teve que enfrentar na gravura *S. Jerónimo no seu estúdio* (fig. 20). Dürer imagina o estúdio de S. Jerónimo e representa o seu interior substituindo a parede do lado de cá pelo plano da figura. Imagina o ponto de onde está a ver o interior do estúdio, e traça as diferentes linhas da figura, do teto, da secretária e das janelas, servindo-se das descobertas, suas e de outros pintores, sobre este tipo de representação, como veremos no cap. II.

De início, partiremos da perspectiva cavaleira da sala rectangular, pois será mais fácil para o leitor visualizar os processos que usaremos para traçar as figuras em perspectiva linear. Posteriormente, partiremos das vistas da geometria decritiva, que nos permitem considerar e desenhar figuras mais complexas, como por exemplo poliedros.

O processo que iremos usar para representar a sala rectangular e os objectos no seu interior em *perspectiva linear*, sendo o plano da figura $KLMN$, está simbólicamente representado na figura 21, em que podemos observar:

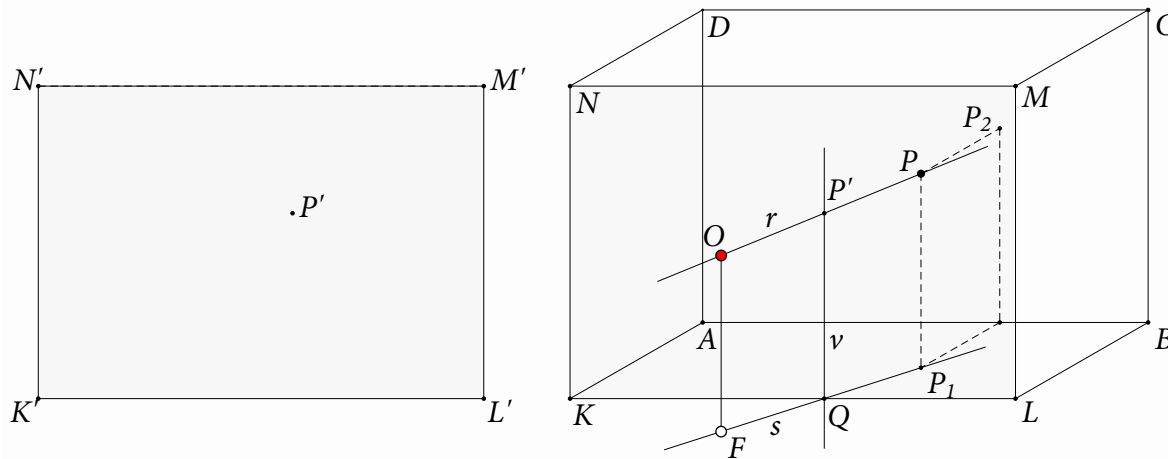


Figura 21

• um ponto P a representar, e as suas projecções no plano vertical (parede do fundo) e no plano horizontal (soalho), respectivamente P_2 e P_1 ;

• uma recta r unindo O a P , cuja intersecção com o plano da figura $KLMN$ queremos determinar;

• uma recta s unindo F a P_1 e a sua intersecção Q com o segmento KL ;

• uma recta vertical v no plano $KLMN$ passando por Q ;

• a intersecção P' de v com r .

Para evitar a sobreposição da figura em cavaleira com a figura em perspectiva linear, procedemos a uma translação (vector KK') do rectângulo $KLMN$ e apenas representaremos, de aqui em diante, as translações e não as figuras originais.

Iremos agora, a pouco a pouco, povoando de objectos a nossa sala rectangular e vendo como esses objectos são representados em perspectiva linear no rectângulo $K'L'M'N'$. Mas é óbvio que mesmo as próprias paredes, o soalho e o teto desta sala admitem uma representação em perspectiva linear! Se é certo que a intersecção da recta OK (ou OL , OM e ON) com o plano $KLMN$ são os próprios pontos K , L , M e N , o mesmo não acontece com os pontos A , B , C e D ! Vejamos por exemplo, na fig. 22, a construção da perspectiva linear do ponto C (análoga à que fizemos para o ponto P). Mas não será necessário repetir na íntegra o procedimento para os pontos A , B e D e depois para todos os pontos de todos os objectos que imaginemos no interior desta sala...!!! A geometria vem em socorro da arte e simplifica e automatiza esses procedimentos, como iremos ver no que se segue... Alguns pintores do Renascimento compreenderam isso mesmo, e descobriram assim a perspectiva linear!

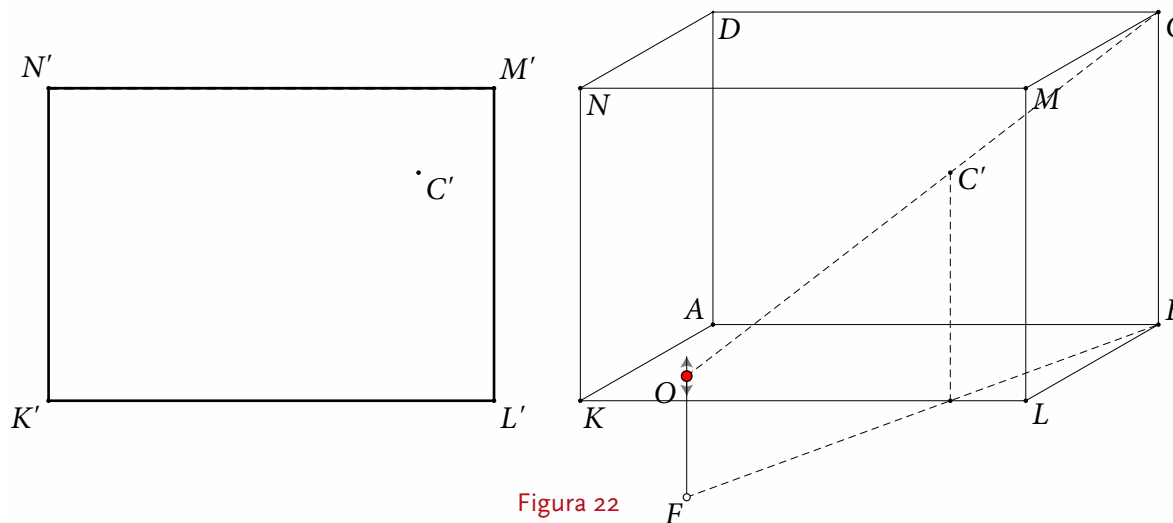


Figura 22